CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS - CENTRE PARISIEN DE MANAGEMENT

ESCP ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS
79, avenue de la république
75011 paris - tél. : 355.39.08

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

Mathématiques 2e épreuve

LUNDI 11 MAI DE 14 H A 17 H

Durée 3 heures

PROBLEME I

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées séparément.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des réels, $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de E et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Soit f l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice, dans la base $\mathcal{E}$, est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PREMIERE PARTIE

Question 1/. :

a)- Montrer que f admet une valeur propre triple μ que l'on déterminera.

b)- Déterminer le rang de l'endomorphisme $(f - \mu i)$ où i désigne l'application identique de E ; en déduire la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre μ. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

Question 2/. :

a)- Déterminer un vecteur propre $\vec{u_1}$ de f.

Soit E_1 le sous-espace vectoriel de E engendré par $\vec{u_1}$.

Soit E'_1 le sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

b) - Montrer que E_1 et E'_1 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Notons p_1 l'élément de $\mathcal{L}(E)$ qui associe à tout vecteur $\vec{x}$ de E sa projection sur E'_1 parallèlement à E_1 ; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ de E dans la base $\mathcal{E}$;

c) - Déterminer les coordonnées de $p_1(\vec{x})$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de E'_1.

d) - Déterminer la matrice P_1 représentant p_1 dans $\mathcal{E}$ puis la matrice M représentant $p_1 \circ f$ dans $\mathcal{E}$.

Question 3/. :

a) - Montrer que μ est valeur propre de $p_1 \circ f$.

b) - Quelle est la dimension du sous-espace propre de $p_1 \circ f$ associé à la valeur propre μ.

c) - Déterminer un vecteur propre $\vec{u_2}$ de $p_1 \circ f$ associé à la valeur propre μ.

d) - Montrer que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{e_1})$ est une base de E ; quelle est la matrice de f dans cette base.

DEUXIEME PARTIE

Question 1/. :

Notons ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

a) - Montrer que ${}^tA.A$ est la matrice dans la base $\mathcal{E}$ d'une forme quadratique définie positive φ.

On notera $\|\vec{x}\|$ la norme du vecteur $\vec{x}$ de E définie par la forme quadratique φ, et X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ de E sur la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

b) - Exprimer $\|\vec{x}\|$ en fonction de X et A.

c) - Application numérique : calculer $\|\vec{x}\|$ pour $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Question 2/. :

Soit $\mathcal{J} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ une autre base de E ; soit Y la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\vec{x}$ de E dans la base $\mathcal{J}$, et soit Q la matrice de changement de base telle que $Y = QX$.

a)- Exprimer $\|\vec{x}\|$ en fonction de Y, Q, A.

b)- Montrer que l'on peut choisir $\mathcal{J}$ pour que $\|\vec{x}\|^2 = {}^tY.Y$; donner un exemple d'une telle base et préciser la matrice de changement de base Q correspondante.

Question 3/. :

Soit $h \in \mathcal{L}(E)$, notons $S = \{\|h(\vec{x})\| / \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| = 1\}$.

a)- Montrer que S est majoré.

Nous admettrons que le plus petit majorant de S appartient à S.

Pour tout $h \in \mathcal{L}(E)$ notons $\phi(h) = \underset{\|\vec{x}\|=1}{\text{Sup}} \{\|h(\vec{x})\|\}$

b)- Montrer que $\forall (h, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$

$$\phi(h \circ g) \leqslant \phi(h).\phi(g)$$

c)- Montrer que pour tout élément h de $\mathcal{L}(E)$ les modules des valeurs propres de h sont inférieurs ou égaux à $\phi(h)$.

PROBLEME II

f désignant une fonction numérique définie et continue sur $I = [-1, +1]$, on définit l'application F de I dans R par :

$$\forall x \in I \qquad F(x) = \int_{-1}^{+1} |t(x - t)|\ f(t)\ dt$$

Question 1/. :

- Etudier la parité de F lorsque f est paire puis impaire.

Question 2/. :

a)- Donner pour $x \in [-1, 0]$ puis pour $x \in [0, 1]$ une expression de F ne contenant pas le symbole "valeur absolue".

b)- F est-elle continue sur I ?

c)- Etudier la dériviabilité de F sur $]-1, 0[$, sur $]0, 1[$, puis en 0.

d)- Etudier de même l'existence de la dérivée seconde F" que l'on explicitera.

Question 3/. :

Soit $f(t) = \frac{1}{1 + t^6}$

- *Calculer* $\varphi_1(y) = \int_0^y t\, f(t)\, dt$

$$\varphi_2(y) = \int_0^y t^2\, f(t)\, dt$$

où y est un réel quelconque.

- *En déduire F(x).*

Question 4/. :

Soit $f(t) = |t| \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{2 + t}\right)$

- *Déterminer le développement limité, à l'ordre 5, au voisinage de 0 de F(x) en fonction de F(0) et F'(0) que l'on ne calculera pas.*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail